УДК 512.544

М.М. Семко, О.А. Ярова

Національний університет державної податкової служби України

ГРУПИ, В ЯКИХ ПІДГРУПИ, ЩО НЕ Є НОРМАЛЬНИМИ, БЛИЗЬКІ ДО АБЕЛЕВИХ ГРУП

Розглядаються розв'язні групи, кожна підгрупа яких або є нормальною, або має черніковський комутант.

Ключові слова: черніковська група, розв'язні групи.

Рассматриваются разрешимые группы, каждая подгруппа которых либо нормальная, либо имеет черниковский коммутант.

Ключевые слова: черниковские группы, разрешимые группы.

In this paper we consider solvable groups, each subgroup is either normal or has a Chernikov commutator subgroup.

Key words: Chernikov group, solvable group.

Якщо G – група, то через $\mathbf{L}_{norm}(G)$ (відповідно через $\mathbf{L}_{non\text{-}norm}(G)$) будемо позначати систему всіх нормальних підгруп групи G (відповідно систему всіх підгруп, що не є нормальними). Групи з великими системами нормальних підгруп є досить давнім об'єктом дослідження в теорії груп. Нормальні підгрупи мають досить великий вплив на будову групи, тому у багатьох випадках, коли їх досить багато, структура групи може бути детально вивчена. Образно кажучи, чим більше має група нормальних підгруп, тим ближче група до абелевої. Наприклад, якщо всі підгрупи групи є нормальними (тобто система $\mathbf{L}_{norm}(G)$ містить усі підгрупи групи і відповідно система $\mathbf{L}_{non\text{-}norm}(G)$ є пустою), то вона або абелева, або є прямим добутком групи кватерніонів, елементарної абелевої *2*-групи та періодичної групи без елементів порядку *2*. Цей результат був отриманий для скінченних груп ще в роботі Р. Дедекінда [17], а потім був розширений на довільні групи в роботі Р. Бера [18]. Природним наступним етапом стало вивчення груп G, в яких система $\mathbf{L}_{non\text{-}norm}(G)$ задовольняє деякому (часто досить сильному) обмеженню. Першими такими роботами були роботи О.Ю. Шмідта [1; 2], що вже стали класичними. В них О.Ю. Шмідт вивчав скінченні групи, в яких усі підгрупи системи $\mathbf{L}_{non\text{-}norm}(G)$ є спряженими або система підгруп $\mathbf{L}_{non\text{-}norm}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Але систематичне вивчення груп, у яких система підгруп, що не є нормальними, задовольняє деяку досить сильну умову, починається зі статей С.М. Чернікова [3; 4]. У розвитку цієї тематики брало участь багато відомих алгебраїстів, які збагатили її глибокими і цікавими результатами. Однією з цікавих ділянок цієї тематики було вивчення груп, в яких кожна підгрупа, що не є нормальною, буде абелевою. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Їх вивчення почалося в роботах М.Ф. Сесєкіна та Г.М. Ромаліса [5 – 7]. Скінченні метагамільтонові групи вивчалися в роботах В.Т. Нагребецького [8] та А.А. Махньова [9]. Повний опис метагамільтонових груп було отримано в роботі М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [10]. Клас абелевих груп має багато природних розширень. Одними з них є клас груп зі скінченним комутантом та більш широкий клас *FC*-груп. У статтях Л.А. Курдаченко, Х. Отала, А. Руссо та Д. Вінченці [19; 20] вивчалися групи, у яких підгрупи системи $L_{non\text{-}norm}(G)$ мають скінченний комутант або будуть *FC*-групами. Оскільки природним узагальненням скінченних груп є черніковські групи, то природним розширенням груп із скінченним комутантом будуть групи з черніковським комутантом. Тому природним продовженням [19; 20] стає розгляд груп, в яких кожна підгрупа або є нормальною, або має черніковський комутант. Групи з такою властивістю почали вивчатися в [11 – 12; 21]. У [21] були отримані перші структурні характеристики вказаних груп. У [11] доведено, що якщо група, кожна підгрупа якої або є нормальною, або має черніковський комутант, має підгрупу скінченного індексу з черніковським комутантом, то і вся група має черніковський комутант. У [12] було розпочато систематичне дослідження розв'язних груп, кожна підгрупа якої або є нормальною, або має черніковський комутант. Зокрема доведено, що якщо така група є розширенням абелевої групи за допомогою скінчено породженої, то вона має черніковський комутант. Дана робота є продовженням [12].

Лема 1. Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є абелевою та не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді центр групи G містить її комутант.

Доведення. Нехай $L = \{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ – така система підгруп групи G, кожна з яких містить у собі A, що $\{L_\lambda/A \mid \lambda \in \Lambda\}$ буде локальною системою всіх скінчено породжених підгруп фактор-групи G/A. З теореми 2 [12] випливає, що комутант D_λ підгрупи L_λ буде черніковською підгрупою для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Оскільки L_λ/A є абелевою, то підгрупа A містить у собі D_λ, зокрема D_λ є абелевою. Тоді D_λ має таку систему $\{D_{\lambda n} \mid n \in N\}$ своїх скінченних G-інваріантних підгруп, що D_λ буде породжуватись підгрупами цієї системи. Централізатор кожної з підгруп $D_{\lambda n}$ має скінченний індекс у групі G. З іншого боку, кожен такий централізатор містить у собі підгрупу A, а оскільки фактор-група G/A не містить у собі власних підгруп скінченного індексу, то цей централізатор повинен співпадати з усією групою G. Інакше кажучи, центр групи G містить у собі підгрупу $D_{\lambda n}$ для кожного натурального числа n. Оскільки підгрупи $D_{\lambda n}$ породжують D_λ то центр групи G містить у собі підгрупу D_λ, і це має місце для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Якщо $L_\lambda \leq L_\mu$, то очевидно має місце включення $D_\lambda \leq D_\mu$ Оскільки система $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ є локальною, то і система $\{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ буде локальною. Тому об'єднання $D = \cup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ буде підгрупою групи G. Як ми показали вище, центр групи G містить у собі підгрупу D. З того факту, що група G породжується підгрупами L_λ, $\lambda \in \Lambda$, випливає, що комутант [G, G] співпадає з підгрупою D. Але тоді фактор-група $G/\zeta(G)$ буде абелевою.

Лема 2. Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є абелевою та не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді група G буде абелевою.

Доведення. З леми 1 отримуємо, що група G буде нільпотентною та її клас нільпотентності не перевищує 2. Оскільки вона є періодичною, то маємо стандартний прямий розклад $G = \times_{p \in \Pi(G)} S_p$, де S_p – силовська p-підгрупа G, $p \in \Pi(G)$. Кожна підгрупа S_p буде розширення своєї нормальної абелевої підгрупи $S_p \cap A$ за допомогою абелевої групи $S_p/(S_p \cap A) \cong S_pA/A$. Покладемо $Q = \times_{q \neq p} S_q$, тоді маємо ізоморфізм $S_p \cong G/Q$, з якого отримуємо ізоморфізм $S_pA/A \cong G/QA \cong (G/A)/(QA/A)$.

Таким чином, $S_p/(S_p \cap A)$ буде ізоморфною до деякої фактор-групи групи G/A. Це тягне за собою той факт, що фактор-група $S_p/(S_p \cap A)$ не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. Оскільки ця фактор-група є абелевою, то вона буде ділимою. Тоді центр підгрупи S_p містить у собі підгрупу $S_p \cap A = A_p$ [13]. Оскільки S_p/A_p є ділимою абелевою, то вона розкладається у прямий добуток квазіциклічних підгруп (див., наприклад, [14, теорема 23.1]). Але тоді S_p має зростаючий ряд підгруп

$$A_p = P_0 \leq P_1 \leq \dots P_\alpha \leq P_{\alpha+1} \leq \dots \leq P_\gamma = S_p,$$

фактори якого будуть квазіциклічними групами. Розглянемо підгрупу P_1. Оскільки A_p буде її центральною підгрупою, а фактор-група P_1/A_p є квазіциклічною, то P_1 буде абелевою. З того факту, що S_p/A_p є абелевою, випливає, що P_1 буде нормальною підгрупою в S_p/A_p. З доведеного вище отримуємо, що P_1 буде центральною підгрупою S_p. За допомогою попередніх аргументів покажемо, що P_2 буде абелевою. Застосувавши тепер просту трансфінітну індукцію, отримаємо, що S_p є абелевою. Оскільки це має місце для кожного простого числа p з множини $\Pi(G)$, то і група G буде абелевою.

Наслідок 1. Нехай G – періодична метабелева група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді вона буде абелевою.

Наслідок 2. Нехай G – періодична розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченого індексу. Тоді вона буде абелевою.

Доведення. Припустимо, що група G не є абелевою, та нехай $D = [G, G]$ та $K = [D, D]$. Тоді $G \neq D$ та $D \neq K$. Фактор-група G/K буде метабелевою. Але тоді з наслідку 1 випливає, що вона повинна бути абелевою. У цьому випадку підгрупа K містить у собі D, а оскільки має місце і протилежне включення, то $D = K$. Отримана суперечність показує, що група G буде абелевою.

Наслідок 3. Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді вона буде абелевою.

Доведення. Дійсно, оскільки група G не містить у собі власних підгруп, які мають скінченний індекс, то вона буде розв'язною, а тоді можемо застосувати наслідок 2.

Теорема 1. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G – локально майже розв'язна група. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.*

Доведення. Дійсно, із теореми 1 роботи [21] випливає, що група G буде майже розв'язною. Тепер є можливість застосувати наслідок 3.

Наслідок 1. Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Якщо G не має власних підгруп скінченного індексу, то вона буде абелевою.

Наслідок 2. Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A не має власних підгруп скінченного індексу. Тоді група G буде абелевою.

Доведення. З наслідку 3 леми 2 отримуємо, що фактор-група G/A буде абелевою. Тепер залишається застосувати лему 2.

Теорема 2. *Нехай G – періодична майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну підгрупу A, що фактор-група G/A не має власних підгруп скінченного індексу. Якщо комутант A є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Нехай K = [A, A], тоді підгрупа K буде черніковською. До фактор-групи G/K можемо тепер застосувати наслідок 2 і отримати, що фактор-група G/K буде абелевою. Це означає, що K буде комутантом усієї групи G.

Наслідок 1. Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну підгрупу A, що фактор-група G/A є черніковською. Якщо комутант A є черніковською підгрупою, то і комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.

Доведення. Дійсно, позначимо через D/A ділиму частину черніковської фактор-групи G/A та нехай K = [D, D]. Із теореми 2 можна тепер отримати, що K буде черніковською підгрупою. Оскільки підгрупа D має в групі G скінчений індекс, то основний результат роботи [11] доводить той факт, що комутант усієї групи G також буде черніковською підгрупою.

Розглянемо зараз наступне узагальнення резидуально скінченних груп. Нехай **X** – клас груп. Будемо говорити, що група G є *резидуально **X**-група*, якщо для кожного її неодиничного елемента g існує така нормальна підгрупа H_g, що не містить цього елемента і фактор-група G/H_g належить до класу груп **X**.

Якщо **X** – це клас черніковських груп, то будемо говорити про *резидуально черніковські групи.*

Теорема 3. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G є резидуально черніковською групою. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Оскільки G є резидуально черніковською групою, то вона має систему нормальних підгруп $\{H_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, що мають наступні властивості:

$$\cap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \langle 1\rangle;$$

фактор-група G/H_λ є черніковською для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$.

Якщо знайдеться такий індекс $\mu\in\Lambda$, що комутант $[H_\mu, H_\mu]$ є черніковською підгрупою, то з наслідку 1 теореми 2 отримаємо, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. Таким чином, далі ми можемо вважати, що кожен комутант $[H_\lambda, H_\lambda]$ не буде черніковською підгрупою для будь-якого індексу $\lambda\in\Lambda$. З леми 1 [21] отримаємо, що фактор-група G/H_λ буде дедекіндовою для кожного індексу $\lambda\in\Lambda$. Припустимо, що група G містить у собі таку нормальну підгрупу U, що фактор-група G/U буде неабелевою дедекіндовою групою. У цьому випадку будемо мати $G/U = Q/U \times V/U$, де Q/U – група кватерніонів, а V/U – прямий добуток елементарної абелевої *2*-підгрупи та періодичної абелевої підгрупи без елементів порядку *2*. Розглянемо зараз систему нормальних підгруп $\{V_\lambda = V \cap H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Оскільки підгрупа V має скінченний індекс в усій групі G, то фактор-група G/V_λ (а отже і V/V_λ) буде черніковською для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. Припустимо, що знайдеться такий індекс $\nu \in \Lambda$, що фактор-група V/V_λ не є абелевою. Тоді V містить у собі нормальну підгрупу Y, для якої фактор-група V/Y буде групою кватерніонів. Підгрупа Y має, очевидно, скінченний індекс у групі G. Якщо припустити тепер, що її комутант [Y, Y] є черніковською підгрупою, то з основного результату [11] отримаємо, що і комутант [G, G] буде черніковською підгрупою, і все доведено. Тому зараз будемо вважати, що комутант [Y, Y] не є черніковською підгрупою. Тоді підгрупа Y буде нормальною в групі G, і за лемою 1 [21] фактор-група G/Y повинна бути дедекіндовою. З іншого боку, фактори G/V та V/Y ізоморфні до групи кватерніонів, а тому G/Y не може бути дедекіндовою. Отримана суперечність показує, що фактор-група V/V_λ є абелевою для кожного індексу $\lambda \in \Lambda$. З рівності $\cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = \langle 1 \rangle$ випливає, що і $\cap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \langle 1 \rangle$. Використовуючи теорему Ремака, отримаємо, що підгрупа V буде ізоморфною до деякої підгрупи декартового добутку $\prod_{\lambda \in \Lambda} V/V_\lambda$. Оскільки кожна з груп V/V_λ є абелевою, то декартовий добуток $\prod_{\lambda \in \Lambda} V/V_\lambda$ буде абелевою групою, а тому і її підгрупа V також буде абелевою. За своїм вибором підгрупа V має скінченний індекс у групі G, і застосувавши знову основний результат [11], отримаємо, що і комутант [G, G] буде черніковською підгрупою.

Якщо G – група та π – деяка множина простих чисел, то через $\mathbf{O}_\pi(G)$ будемо позначати найбільшу нормальну *π*-підгрупу групи G. Якщо *p* – просте число, то через *p′* будемо позначати множину всіх простих чисел, відмінних від *p*. Таким чином, $\mathbf{O}_{p'}(G)$ – це найбільша нормальна підгрупа групи G, яка не містить *p*-елементів.

Наслідок 1. Нехай G – локально скінченна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що силовські p-підгрупі G є черніковськими для кожного простого числа p. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.

Доведення. З основного результату [15] випливає, що група G буде майже локально розв′язною. З основного результату [16] тоді випливає, що фактор-група $G/\mathbf{O}_{p'}(G)$ буде черніковською групою для кожного простого числа p. Очевидно, перетин усіх нормальних підгруп $\mathbf{O}_{p'}(G)$ є одиничним (тобто перетин за усіма простими числами p). Це означає, що група G є резидуально черніковською групою. З теореми 3 отримаємо тепер, що комутант групи G буде черніковською підгрупою.

Лема 3. Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є квазіциклічною p-групою. Якщо g – елемент групи G, що має нескінченний порядок, то взаємний комутант [g, G] буде квазіциклічною p-групою або одиничною групою.

Доведення. З леми 1 випливає, що комутант групи G міститься в її центрі. Звідси випливає, що відображення $\theta_g: x \longrightarrow [g, x], x \in G$, буде ендоморфізмом групи G. Також маємо $\mathbf{Ker}\theta_g = C_G(g)$, $\mathbf{Im}\theta_g = [g, G]$. Очевидно, що централізатор $C_G(g)$ містить у собі підгрупу A. Оскільки кожна фактор-група G/A або є квазіциклічною p-групою, або буде одиничною, то із ізоморфізму

$$G/\mathbf{Ker}\theta_g = G/C_G(g) \cong \mathbf{Im}\theta_g = [g, G]$$

отримаємо, що взаємний комутант $[g, G]$ буде або квазіциклічною p-групою, або одиничною групою.

Наслідок 1. Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є ділимою черніковською групою. Якщо g – елемент групи G, що має нескінченний порядок, то взаємний комутант $[g, G]$ буде черніковською групою.

Доведення. Оскільки фактор-група G/A є ділимою черніковською групою, то група G має скінченний ряд підгруп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = G,$$

фактори A_{j+1}/A_j якого будуть квазіциклічними групами, $0 \leq j \leq n-1$. Доведення проведемо за допомогою індукції за числом n. Якщо $n = 1$, то твердження випливає з леми 3 (слід зазначити, що одинична група є черніковською). Припустимо тепер, що $n > 1$, та нехай вже доведено, що взаємний комутант $[g, A_{n-1}]$ є черніковською підгрупою. Наступне доведення буде проводитись для фактор-групи $G/[g, A_{n-1}]$. Нашою метою є довести, що взаємний комутант $[g[g, A_{n-1}], G/[g, A_{n-1}]]$ є черніковською підгрупою. З рівності

$$[g, G]/[g, A_{n-1}] = [g[g, A_{n-1}], G/[g, A_{n-1}]]$$

та нашого припущення про те, що $[g, A_{n-1}]$ – черніковська підгрупа, буде випливати тоді, що взаємний комутант $[g, G]$ також буде черніковською підгрупою. Тому, щоб не ускладнювати наші позначення, є доцільним припустити, що підгрупа $[g, A_{n-1}]$ є одиничною. Інакше кажучи, ми будемо вважати, що центр підгрупи A_{n-1} містить елемент g. З леми 1 випливає, що комутант групи G міститься в її центрі. Звідси випливає, що відображення $\theta_g: x \longrightarrow [g, x], x \in G$, буде ендоморфізмом групи G. З нашого індуктивного припущення випливає, що централізатор $C_G(g)$ містить у собі підгрупу A_{n-1}. З ізоморфізму

$$G/\mathbf{Ker}\theta_g = G/C_G(g) \cong \mathbf{Im}\theta_g = [g, G]$$

отримаємо, що взаємний комутант $[g, G]$ буде або квазіциклічною p-групою, або одиничною групою.

Лема 4. Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що фактор – група G/A є абелевою та мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.

Доведення. Оскільки фактор-група G/A є абелевою та мінімаксною, то вона містить у собі таку вільну від скруту скінченно породжену підгрупу C/A, що фактор-група G/C буде черніковською групою. Позначимо через D/C ділиму частину групи G/C. Нашою метою буде довести, що комутант $[D, D]$ буде черніковською підгрупою. Тоді з основного результату [11] отримаємо, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою. Тому, щоб не ускладнювати наші позначення, є доцільним припустити, що фактор-група G/C буде ділимою черніковською групою.

З теореми 2 [12] випливає, що комутант [C, C] буде черніковською підгрупою. Знову, щоб не ускладнювати наші позначення, ми можемо припустити, що підгрупа [C, C] буде одиничною. Інакше кажучи, ми будемо вважати, що підгрупа C є абелевою. Тоді підгрупа A буде її періодичною частиною. Зазначимо, що підгрупа A виділяється у підгрупі C прямим множником, тобто $C = A \times K$ для деякої підгрупи K [14, теорема 14.4]. Із ізоморфізму $C/A \cong K$ випливає той факт, що підгрупа K буде вільною від скруту та скінчено породженою, тобто вона буде вільною абелевою. Отже K має прямий розклад

$$K = \langle g_1 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle,$$

де кожен з елементів g_j має нескінченний порядок, $1 \leq j \leq n$. З леми 1 випливає, що центр групи G містить її комутант. Наслідок 1 леми 3 показує, що взаємний комутант $[g_j, G]$ буде черніковською групою для кожного індексу j, $1 \leq j \leq n$. Позначимо через L добуток цих взаємних комутантів, $L = [g_1, G] \ldots [g_n, G]$. Тоді L буде нормальною в G черніковською підгрупою. У фактор-групі G/L підгрупа KL/L уже міститься в її центрі, зокрема, вона буде нормальною. Фактор-група $(G/L)/(KL/L) \cong G/KL$ буде розширенням своєї періодичної абелевої підгрупи (CL/L)/(KL/L) за допомогою ділимої черніковської групи G/CL, а тому буде періодичною. Застосувавши лему 2, ми отримаємо той факт, що (G/L)/(KL/L) буде абелевою. Далі, фактор-група G/L буде розширенням своєї періодичної нормальної підгрупи AL/L за допомогою абелевої групи G/AL. Позначимо через T/AL періодичну частину фактор-групи G/AL. Тоді підгрупа T/L буде нормальною періодичною підгрупою і фактор-група $(G/L)/(T/L) \cong G/T$ буде абелевою групою, вільною від скруту. Оскільки $KL/L \cong K$ є вільною від скруту, то перетин $(T/L) \cap (KL/L)$ буде одиничним. Застосувавши теорему Ремака, отримаємо вкладання групи G/L у прямий добуток $(G/L)/(KL/L) \times (G/L)/(T/L)$. Як ми вже бачили вище, обидва прямих множника цього добутку є абелевими групами. Звідси випливає, що фактор-група G/L також буде абелевою. У свою чергу, це тягне за собою той факт, що комутант усієї групи G міститься у підгрупі L, а отже співпадає з L. Оскільки підгрупа L є черніковською, то все доведено.

Лема 5. Нехай G – група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є майже розв'язною та мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.

Доведення. З теореми 1 [21] випливає, що множина T всіх елементів скінченного порядку групи G буде характеристичною підгрупою, а фактор-група G/T буде вільною від скруту абелевою групою. Оскільки підгрупа A є періодичною, то вона міститься у підгрупі T. Зазначимо, що періодична майже розв'язна мінімаксна група є черніковською, а отже фактор-група T/A є черніковською. З наслідку 1 теореми 2 випливає, що комутант [T, T] буде черніковською підгрупою. З леми 4 тепер отримуємо, що комутант фактор-групи G/[T, T] буде черніковською підгрупою. Нарешті, рівність

$$[G, G]/[T, T] = [G/[T, T], G/[T, T]]$$

доводить той факт, що комутант усієї групи G буде черніковською підгрупою.

Теорема 4. *Нехай G – локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну періодичну абелеву підгрупу A, що фактор-група G/A є мінімаксною. Тоді комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Слід тільки зазначити, що група G буде майже розв'язною, а тому ми можемо застосувати лему 5.

Нехай G – група, в якій система $\boldsymbol{L}_{non\text{-}norm}(G)$ складається з підгруп, що мають черніковський комутант. Позначимо через **S** систему всіх тих підгруп, комутант яких не є черніковським. Тоді кожна з цих підгруп буде нормальною та визначає дедекіндову фактор-групу. Згадаємо, що дедекіндова група є нільпотентною, причому її клас нільпотентності не перевищує *2*. Нехай H – перетин усіх підгруп, що належать до системи **S**. Тоді фактор-група G/H є нільпотентною групою, клас нільпотентності якої не перевищує *2*. Якщо K – власна підгрупа H, то із вибору H випливає, що $K \notin \mathbf{S}$, тому її комутант має бути черніковським. Можна довести, що при деяких досить загальних умовах підгрупа H також має черніковський комутант. З цього випливає, що тоді вся група G буде майже розв'язною, більш того, випадок метабелевої групи стає основним. Наступний результат розпочинає розгляд цього випадку.

Теорема 5. *Нехай G – періодична група, кожна підгрупа якої або нормальна, або має черніковський комутант. Припустимо, що G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу, що фактор-група G/A також є абелевою. Якщо $\Pi(A) \cap \Pi(G/A) = \varnothing$, то комутант групи G буде черніковською підгрупою.*

Доведення. Якщо центр групи містить у собі підгрупу A, то група G буде нільпотентною. У цьому випадку вона буде прямим добутком своєї силовської $\Pi(A)$-підгрупи та силовської $\Pi(G/A)$-підгрупи. Зокрема, вона буде абелевою, так що у цьому випадку все доведено. Тому далі будемо розглядати випадок, коли підгрупа A не є центральною. Тоді знайдеться елемент $a_1 \in A$ та елемент $g_1 \in G \backslash A$, що мають властивість $[a_1, g_1] \neq 1$. Ми можемо вважати, що $\Pi(\langle g_1 \rangle) \cap \Pi(G/A) = \varnothing$. Покладемо $C_1 = C_A(g_1)$. Оскільки фактор-група G/A є абелевою, то відображення

$$\theta_1 : a \longrightarrow [g_1, a], a \in A,$$

буде G-ендоморфізмом підгрупи A. Звідси випливає, що $\mathbf{Ker}\theta_1 = C_A(g_1)$ та $\mathbf{Im}\theta_1 = [g_1, A]$ будуть G-інваріантними підгрупами A. Оскільки підгрупа A має скінченний індекс в $\langle A, g_1 \rangle$, то основний результат [11] показує, що комутант підгрупи $\langle A, g_1 \rangle$ буде черніковською підгрупою. Зокрема тоді і взаємний комутант $[g_1, A]$ буде черніковською підгрупою. З ізоморфізму

$$A/\mathbf{Ker}\theta_1 = A/C_A(g_1) \cong \mathbf{Im}\ \theta_g = [g_1, A]$$

отримаємо, що фактор-група $A/C_A(g_1)$ буде черніковською. Припустимо, що центр групи G містить у собі підгрупу C_1 і розглянемо фактор-групу G/C_1. Зазначимо, що підгрупа A/C_1 має доповнення: $G/C_1 = A/C_1 \leftthreetimes L/C_1$ [22, теорема 2.4.5]. Із рівності $\Pi(A) \cap \Pi(G/A) = \varnothing$ та того факту, що A/C_1 – абелева черніковська підгрупа, випливає, що централізатор E/C_1 підгрупи A/C_1 має в групі G/C_1 скінченний індекс. Далі, підгрупа E/C_1 уже має прямий розклад

$E/C_1 = A/C_1 \times K/C_1$. Зокрема, вона буде абелевою. З включення $C_1 \leq \zeta(G)$ отримаємо, що підгрупа E буде нільпотентною, а отже абелевою. Тепер залишається застосувати основний результат [11].

Припустимо тепер, що центр групи G не містить у собі підгрупи C_1. Тоді знайдеться елемент $a_2 \in C_1$ та елемент $x_2 \in G \setminus A$, що мають властивість $[a_2, x_2] \neq 1$. Знову підгрупа $\langle g_1, x_2, A \rangle$ має напівпрямий розклад: $\langle g_1, x_2, A \rangle = A \leftthreetimes S$ та всі доповнення до A є спряженими [22, теорема 2.4.5]. Зокрема, можна вважати, що підгрупа S містить елемент g_1. Маємо $x_2 = g_2 b$, де $g_2 \in S$, $b \in A$. Тоді $[a_2, x_2] = [a_2, g_2]$. Зазначимо, що S є абелевою, а тому $S = \langle g_1, g_2 \rangle$. Відмітимо також, що підгрупа S є прямим добутком двох циклічних підгруп, а тому можна вважати, що $S = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$. Маємо прямий розклад

$$A = C_A(\langle g_1 \rangle) \oplus [A, \langle g_1 \rangle] = C_A(g_1) \oplus [A, g_1] = C_1 \oplus [A, \langle g_1 \rangle]$$

(див, наприклад, [23, пропозиція 5.19]). Оскільки $a_2 \in C_1$, то $\langle g_1, a_1 \rangle \cap \langle g_2, a_2 \rangle = \langle 1 \rangle$. Покладемо $C_2 = C_A(\langle g_1, g_2 \rangle)$. Повторюючи попередні міркування, отримаємо, що фактор-група A/C_2 буде черніковською. Якщо припустити, що центр групи G містить у собі підгрупу C_2, то як і раніше, можна довести, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. Тому будемо вважати, що підгрупа C_2 не є центральною. Тоді знову будемо знаходити елементи g_3, a_3 і т. п. Застосувавши попередні аргументи, знайдемо елементи $g_1, \dots, g_n$; $a_1, \dots, a_n$, які задовольняють наступні умови:

(1) $\langle g_1, \dots, g_n \rangle = \langle g_1 \rangle \times \dots \times \langle g_n \rangle$;

(2) $\Pi(\langle g_1, \dots, g_n \rangle) \cap \Pi(A) = \varnothing$;

(3) $a_1, \dots, a_n \in A$;

(4) $[a_j, g_j] \neq 1$; $1 \leq j \leq n$;

(5) $\langle g_1, a_1, \dots, g_{j-1}, a_{j-1} \rangle \cap \langle g_j, a_j \rangle = \langle 1 \rangle$;

(6) $[g_j, a_k] = 1$, $k < j$, $1 \leq j, k \leq n$.

Якщо процес вибору цих елементів буде скінченним, то, як і вище, можна довести, що комутант групи G буде черніковською підгрупою. Тому припустимо, що цей процес буде нескінченний. Розглянемо довільний елемент g_j. Множину натуральних чисел $\{n \mid n > j\}$ розіб'ємо на дві нескінченні підмножини Λ та M, що мають пустий перетин. Нехай $U = \langle g_t, a_t \mid t \in \Lambda \rangle$, $V = \langle g_t, a_t \mid t \in M \rangle$. Обидві підгрупи U, V будуть $\langle g_j \rangle$-інваріантними, $U \cap V = \langle 1 \rangle$, комутанти $[U, U]$, $[V, V]$ не є черніковськими підгрупами та $\langle g_j \rangle \cap UV = \langle 1 \rangle$. Тоді і комутанти підгруп $\langle g_j \rangle U$ та $\langle g_j \rangle V$ не є черніковськими, а тому ці підгрупи будуть нормальними. Але тоді і їх перетин $\langle g_j \rangle = \langle g_j \rangle U \cap \langle g_j \rangle V$ повинен бути нормальною підгрупою. Звідси випливає, що $[a_j, g_j] \in \langle g_j \rangle$. З іншого боку, оскільки підгрупа A також є нормальною, $[a_j, g_j] \in A$, а тому $[a_j, g_j] \in \langle g_j \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Але ж це суперечить вибору елементів a_j, g_j. Отримана суперечність і доводить наш результат.

Бібліографічні посилання

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп/ О.Ю. Шмидт// Мат. сб. – 1926. – 33.– С. 161–72.
2. **Шмидт О.Ю.** Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп/ О.Ю. Шмидт// Труды семинара по теории групп. – М.– Л., – 1938. – С. 7–26.

3. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп/ С.Н. Черников // Укр. мат. журн.–1967.– 19, № 6.– С. 111–131.
4. **Черников С.Н.** Бесконечные неабелевы группы с условием миниальности для неинвариантных подгрупп /С.Н. Черников//Матем. заметки.–1967.– 6, 1.– С. 11–18.
5. **Ромалис Г.М.** О метагамильтоновых группах I/ Г.М. Ромалис, Н.Ф. Сесекин// Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45–49.
6. **Сесекин Н.Ф.** О метагамильтоновых группах II / Н.Ф. Сесекин, Г.М. Ромалис // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – 6, № 5. – С. 50 – 53.
7. **Ромалис Г.М.** О метагамильтоновых группах III / Г.М. Ромалис, Н.Ф. Сесекин // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – 7, № 3. – С. 195–199.
8. **Нагребецкий В.Т.** Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна/В.Т. Нагребецкий// Мат. зап. Урал. ун-та. – 1967. – 6, № 1. – С. 80–88.
9. **Махнев А.А.** О конечных метагамильтоновых группах/ А.А. Махнев// Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – 10, № 1. – С. 60 – 75.
10. **Кузенний М.Ф.** Метагамільтовані групи та їх узагальнення./ М.Ф. Кузенний, М.М. Семко – К., 1996. – 232 с.
11. **Яровая О.А.** О группах, близьких к метагамильтоновым/О.А. Яровая// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009.–Вип.14.– С. 143–149.
12. **Яровая О.А.** О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым/ О.А. Яровая //Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2008.– Вип. №4.– С.36–39.
13. **Курдаченко Л.А.** Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп/Л.А. Курдаченко// Сиб. мат. журн.– 1984.– 25, №4.– С. 589 – 594.
14. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы/Л. Фукс– В 2 т. – М., 1974.– Т.1.–336 с.
15. **Беляев В.В.** Локально конечные группы с черниковскими силовскими р-подгруппами/ В.В. Беляев// Алгебра и логика. – 1981. – 20, №7. – С. 605–619.
16. **Каргаполов М.И.** Локально конечные группы, имеющие нормальные системы с конечными факторами /М.И. Каргаполов// Сиб. мат. журн. –1961. – 2, № 6.– С. 853 – 873.
17. **Dedekind R.** Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Annalen.– 1897.–**48.**– S. 548 – 561.
18. **Baer R.** Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe //S.-B. Heidelberg Akad.– 1933.– **2.**– S. 12 – 17.
19. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes // Advanced in Group Theory 2002. Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May – June 2002.– Roma,– P. 93 – 110.
20. **Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G.** Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy.– December 2004.– 104A, №2.– P.177 – 189.
21. **Semko N.N., Yarovaya O.A.** On some generalization of metahamiltonian groups // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009.– №2.– P. 16 –24.
22. **Dixon M.R.** Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups. – Singapore: World Scientifik, 1994.– 304 p.
23. **Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya.** Artinian modules over group rings.– Basel, 2007.– 245 p.

Надійшла до редколегії 20.03.11